A FIRST COURSE IN LINEAL ALGEBRA

Seccion SLT

Pagina 495

Ejercicio C22

The linear transformation S: $\mathbb{C}^4 \rightarrowtail \mathbb{C}^3$ is not surjective. Find an output $w \in \mathbb{C}^3$ that has an empty (that is $S^{-1}(w) = \emptyset$.)

La transformación lineal S: $\mathbb{C}^4 \rightarrowtail \mathbb{C}^3$ no es sobrejectiva. Encontrar vector de salida $w \in \mathbb{C}^3$ que tenga una pre-imagen vacia (es decir S^{-1} (w) = $\emptyset$.)

$$S([x_1, x_2, x_3, x_4]) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 \end{pmatrix}$$

Solve

Solucion

To find an element of $\mathbb{C}^3$ with an empty pre-image, we will compute the range of the linear transformation $\mathcal{R}(S)$ and then find an element outside of this set.

By ⟨acronymref|theorem|SSRLT⟩ we can evaluate S with the elements of a spanning set of the domain and create a spanning set for the range.

Para encontrar un elemento del $\mathbb{C}^3$con una pre-imagen vacia, necesitaremos computar el rango de la transformación lineal $\mathcal{R}(S)$ y despues encontrar un elemento fuera de este conjunto.

Por ⟨acronymref|theorem|SSRLT⟩ podremos evaluar S con los elementos del conjunto generado del dominio y crear un conjunto generado para el rango.

$$S\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad S\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad S\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad S\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

So

Entonces

$$\mathcal{R}(S) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

This spanning set is obviously linearly dependent, so we can reduce it to a basis for $\mathcal{R}(S)$ using ⟨acronymref|theorem|BRS⟩, where the elements of the spanning set are placed as the rows of a matrix. The result is thwhere the elements of the spanning set are placed as the rows of a matrix. The result is that

Este conjunto generado es obviamente linealmente dependiente, entonces necesitaremos reducirlo a una base para $\mathcal{R}(S)$ usando ⟨acronymref | theorem | BRS⟩, donde los elementos del conjunto generado son colocados en las filas de una matriz. El resultado es este

$$\mathcal{R}(S) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Therefore, the unique vector in $\mathcal{R}(S)$ with a first slot equal to 6 and a second slot equal to 15 will be the linear combination

Por lo tanto, el unico vector en $\mathcal{R}(S)$ con un primera casilla igual a 6 y una segunda casilla igual a 15 será la combinación lineal

$$6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

So, any vector with first two components equal to 6 and 15, but with a third component different from 9, such as

Entonces, cualquier vector con las primeras dos componenetes iguales a 6 y 15, pero con una tercera componente diferente de 9, como

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -63 \end{pmatrix}$$

will not be an element of the range of S and will therefore have an empty pre-image. Another strategy on this problem is to *guess*. Almost any vector will lie outside the range of T, you have to be unlucky to randomly choose an element of the range. This is because the codomain has dimension 3, while the range is "much smaller" at a dimension of 2. You still need to check that your guess lies outside of the range, which generally will involve solving a system of equations that turns out to be inconsistent.

no será un elemento del rango de S y por lo tanto tiene una pre-imagen vacia. Otra estrategia en este problema es adivinar. Casi todos los vectores se encontrarán fuera del rango de T, usted debe ser desafortunado para elegir al azar un elemento del rango. Esto es debido al codominio que tiene dimension 3, mientras el rango es "mucho menor" en una dimension de 2.

Contributed By Robert Beezer

Contribuido por Robert Beezer

Traducido por Andrés Felipe Forero